

EPREUVE N° 2

DURÉE : 2 heures - COEFFICIENT : 4

Le candidat traitera obligatoirement le sujet correspondant à l'option formulée dans sa demande d'admission à concourir.

Il trouvera ces sujets aux pages suivantes :

- Page 4 - Mathématiques.
- Page 7 - Comptabilité commerciale.
- Page 9 - Géographie économique.
- Page 9 - Droit commercial.
- Page 9 - Droit civil.

PREMIER SUJET

SUJET DE MATHÉMATIQUES

L'utilisation de la calculatrice est autorisée

Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur.

Les parties I et II sont indépendantes

I

Soit f la fonction numérique réelle définie par :

$$f(x) = e^{-x} \sin 2x.$$

1.a. Montrer qu'il existe des couples de réels (T, α) qui vérifient

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = \alpha f(x).$$

Vous déterminerez le couple (T_0, α_0) correspondant à la plus petite valeur strictement positive de T .

b. Soient C_0 , la courbe représentative de f sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) et

C_n la courbe

sur l'intervalle $\left[n \frac{\pi}{2}, (n+1) \frac{\pi}{2}\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Comment peut-on déduire C_n de C_0 ?

2. On se place sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- a. Déterminer $f'(x)$. On pourra poser $t = \tan x$.
- b. Montrer qu'il existe une valeur x_0 de x , unique, telle que $f(x_0) = 0$; en déduire les zéros de f sur \mathbb{R} .
- c. Donner les variations de f .

3. Soient les suites (u_n) et (v_n) de terme général

$$u_n = f\left(x_0 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) \text{ et } v_n = f(x_0 - n\pi), n \in \mathbb{N}.$$

- Quelles sont les limites de (u_n) et (v_n) quand n tend vers $+\infty$?
- En déduire que $f(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers $-\infty$.
- Quelle est la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$?

4. Soient g et h des fonctions numériques définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{-x} \text{ et } h(x) = -e^{-x}.$$

On appelle C_g et C_h leurs courbes représentatives dans $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

- Déterminer les points communs à C_f et C_g , d'une part, et à C_f et C_h , d'autre part.
- Déterminer les tangentes à C_f , C_g et C_h en ces points.
Que remarquez-vous ?
- Construisez les courbes C_f , C_g et C_h .

5. Soit $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

- Montrer que $F(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$e^{-x} (U \cos 2x + V \sin 2x) + W$$

où U , V et W sont trois constantes que l'on déterminera.

- Quelle est la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$?

6. Soient les suites (a_n) et (b_n) ayant pour terme général

$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} f(t) dt \quad \text{et} \quad b_n = - \int_{(n+\frac{1}{2})\pi}^{(n+1)\pi} f(t) dt, n \in \mathbb{N}.$$

- Montrer que (a_n) et (b_n) sont des suites géométriques, dont on déterminera la raison et le premier terme.

- Calculer les sommes $A_n = \sum_{p=0}^n a_p$ et $B_n = \sum_{p=0}^n b_p$.

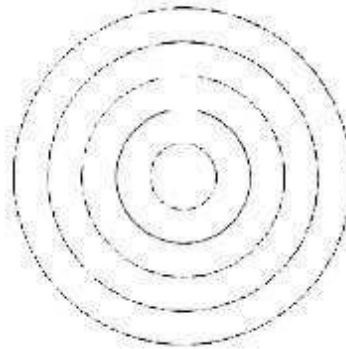
- Montrer que A_n et B_n sont convergentes et trouver leurs limites respectives A et B .

- Calculer $A - B$. Que peut-on conclure ?

II

Dans une fête foraine, une cible est constituée de 5 cercles concentriques de rayons respectifs 1, 2, 3, 4 et 5, délimitant cinq zones Z_1 , Z_2 , Z_3 , Z_4 et Z_5 .

L'extérieur de la cible est considéré comme une sixième zone.



1. Un joueur lance une flèche. La probabilité d'atteindre l'une des zones est proportionnelle à l'aire de cette zone.
Montrer que les probabilités P_2 , P_3 , P_4 , P_5 d'atteindre les zones Z_2 , Z_3 , Z_4 et Z_5 respectivement, sont proportionnelles à P_1 , probabilité d'atteindre la zone Z_1 .
2. Le joueur gagne 30 F, 9 F, 4 F, 2 F et 1 F si la flèche touche respectivement les zones Z_1 , Z_2 , Z_3 , Z_4 et Z_5 .
Il perd k francs s'il rate la cible.
Soit X la variable aléatoire désignant le gain algébrique du joueur.
 - a. Un tireur moyen a 75 % de chances d'atteindre la cible à chaque tir.
Calculer P_1 .
Déterminer k de sorte que l'espérance mathématique de X pour ce tireur soit nulle.
 - b. Un tireur débutant a 50 % de chances de toucher la cible.
Quelle est l'espérance mathématique de X ?
3. Le joueur moyen lance n fois une flèche. Les lancers sont indépendants. Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité qu'au moins une flèche atteigne la zone Z_1 soit supérieure à 0,8.